ANALISIS DUA KONEKSI PELANGI PADA GRAF HASIL OPERASI PERKALIAN KARTESIAN GRAF KIPAS $F_{1,3}$ DAN GRAF LINGKARAN C_n SERTA KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

Elsy Wijayanti[1], Dafik[2], Ervin Oktavianingtyas[3]

E-mail: elsywijayanti1996@gmail.com

Abstract. The rainbow connection of the graph of *G = (V, E)* if for each pair of points *u* and *v* in *G* there is a path with points *u* and *v* as the end points on each side obtaining different colors, the path is called the rainbow path. The rainbow-connected number graph *G* is the smallest positive integer such that *G* has a rainbow connection staining denoted *rc(G).* While the graph is said to be a rainbow 2-connected staining on *G* if for each pair of points u and v on the sides there are 2 different paths, with *u* and *v* being the end points of each side obtaining different colors and 2 passages can not intersect each other, denoted *rc2 (G).* Let *G* be the graph connected with $d(G) \geq 2$ so that $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G) + 1$, with d is degrees. Let G be a rainbow $\kappa \geq 1$ so that $rc_1(G) \leq rc_2(G) \leq \cdots \leq rc_\kappa(G)$ where κ is the number of paths of rainbow connecting every two distinct points in G. The results of this research are new theorem about the rainbow connection and 2-rainbow connected.

Keywords **:** *rainbow connection, 2-rainbow connected, rainbow path*

PENDAHULUAN

Teori graf muncul pertama kali ketika Leonard Euler mencoba menyelesaikan masalah jembatan konigsberg pada tahun 1736. Jembatan Konigsberg yaitu jembatan di sebuah kota tua di Prusia Timur yang kini biasa disebut Kalinigrad. Tujuh jembatan dibangun di atas sungai Pregel agar memungkinkan penghuni Konigsberg dapat berjalan dari satu kota ke kota yang lain. Pada saat itu orang-orang ingin membuat sebuah rute agar orang-orang dapat menyebrangi ketujuh jembatan satu kali saja, namun hal tersebut tidak membuahkan hasil. Leonard Euler berhasil menemukan penyelesaiannya dengan menggunakan graf dimana keempat kota itu sebagai titik *vertex* dan ketujuh jembatan sebagai sisi *edge* yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai [1].

Sebuah graf G merupakan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah

---

[1] Mahasiswa S-1 Progran Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[2] Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[3] Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G [2].

Graf tak berarah atau sebuah graf *G* diartikan sebuah struktur *G=(V(G),E(G)).* dimana *V(G)* adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik *vertex*, dan *E(G)* adalah himpunan boleh kosong dari pasangan *u*, *v* dengan $u, v \in V(G)$ disebut sisi *edges*. Jumlah titik pada graf disebut order dari *G* Dinotasikan *V(G).* Jumlah sisinya disebut *size* dari *G* dinotasikan *E(G).* Graf yang mempunyai order *p=V(G)* dan *size q=E(G)* dapat ditulis *(p,q)*-graf, misalnya $u, v \in V(G)$, titik *u* dikatakan bersisian(*adjecent*) dengan titik *v* jika ada sebuah sisi *e* di antara *u* dan *v* yaitu *e=uv*. Titik *v* dikatakan bertetangga (*neighbour*) dengan titik *u*, atau dapat dinyatakan bahwa *u* dan *v* menempel (*incident*) dengan sisi *e* [3].

Salah satu topik yang menjadi kajian menarik dalam teori graf adalah *Rainbow Connection* (koneksi pelangi). Konsep Koneksi Pelangi adalah salah satu topik dari teori graf yang pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang. Berbagai situasi dapat dimodelkan dengan teori graf. Misalkan *G* adalah graf terhubung tak-trivial dengan pewarnaan sisi $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$, dikatakan pewarnaan Koneksi Pelangi pada *G* jika untuk setiap pasang titik *u* dan *v* terdapat suatu lintasan dengan *u* dan *v* sebagai titik ujung yang setiap sisinya diwarnai dengan warna berbeda. Lintasan tersebut dinamakan Koneksi pelangi. Bilangan terhubung pelangi graf *G* adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga *G* mempunyai suatu pewarnaan koneksi pelangi dinotasikan *rc(G).* Diameter graf dinotasikan dengan *diam(G)*, merupakan maksimum dari himpunan jarak dua titik pada *G* [4].Graf yang dikatakan pewarnaan 2-koneksi pelangi pada *G* jika untuk setiap pasang titik *u* dan *v* di sisi terdapat 2 lintasan berbeda, dengan *u* dan *v* sebagai titik ujung yang setiap isinya memperoleh warna berbeda dan 2 lintasan tidakboleh saling berpotongan. Pada penelitin ini menggunakan graf kipas dan graf lingkaran dengan operasi kartesian, Selain belum diteliti pemilihan graf menyesuaikan dengan konsep 2-koneksi pelangi.

Keterampilan berpikir tingkat tinggi *High Order Thinking Skill* merupakan salah satu keterampilan berpikir dalam pemecahan masalah matematika. Keterampilan berpikir ini tidak hanya membutuhkan kemampuan mengingat saja akan tetapi juga membutuhkan kemampuan lain yang lebih tinggi yaitu menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi. Dalam sebuah taksonomi, satu kontinum itu terdiri atas beberapa kategori.

Dalam taksonomi Bloom yang lama mempunyai satu dimensi yaitu pengetahuan, pemahaman, aplikasi, analisis, sintesis, dan evaluasi, sedangkan taksonomi Bloom yang telah direvisi mempunyai dua dimensi yakni dimensi proses kognitif dan dimensi pengetahuan. Dalam dimensi proses kognitif terdiri atas enam kategori yaitu mengingat, memahami, mengaplikasikan, menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta. Kontinum yang mendasari dimensi proses kognitif dianggap sebagai tingkat-tingkat kognisi yang kompleks. Misalnya memahami dianggap merupakan tingkat kognisi yang lebih komplek ketimbang mengingat. Adapun dimensi pengetahuan terdiri atas pengetahuan Faktual, Konseptual, Prosedural, dan Metakognitif. Kategori ini dianggap merupakan kontinum dari yang konkret (Faktual) sampai yang abstrak (Metakognitif). Kategori-kategori Konseptual dan Prosedural mempunyai tingkat keabstrakan, misalnya pengetahuan prosedural lebih konkret ketimbang pengetahuan konseptual yang paling abstrak [5]. Faktor-faktor yang mempengaruhi proses berpikir atau prestasi mahasiswa secara signifikan adalah lingkungan fisik, motivasi ekstrinsik, keadaan jasmani [6].

Penelitian ini akan mengkaji keterkaitan antara menciptakan teorema dari koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi yang berpacu pada taksonomi Bloom yang telah direvisi.

METODE PENELITIAN

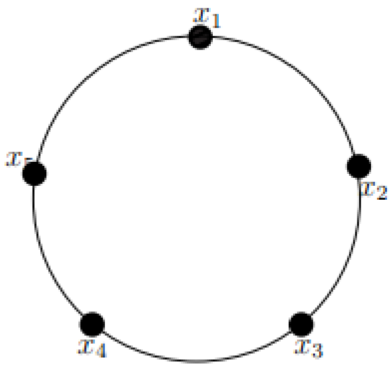
Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang dipakai dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Metode ini akan diterapkan kosep 2-koneksi pelangi pada graf hasil perkalian kartesian graf kipas dan graf lingkaran.

HASIL PENELITIAN

Penelitian ini menghasilkan teorema baru koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi pada graf hasil operasi perkalian kartesian. Penelitian ini diawali dengan menentukan kardinalitas pada graf hasil operasi perkalian kartesian dan menentukan koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi dari graf hasil operasi perkalian kartesian, serta mengaitkan semua tahapan dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi sesuai dengan taksonomi bloom yang telah direvisi. Berikut uraiannya:

- Tahapan mengingat

  Pada tahap ini yang dilakukan adalah mengingat kembali jenis graf yang akan digunakan yaitu graf yang tidak berarah, terhubung, dan graf yang berhingga. Sehingga pada penelitian ini graf yang akan digunakan adalah graf khusus yang dioperasikan dengan operasi perkalian kartesian. Mengingat kembali mengenai *ordo* (banyaknya titik) dan *size* (banyaknya sisi) juga diperlukan pada tahapan ini karena akan menentukan kardinalitas graf hasil operasi tersebut.



Gambar 1. Graf Lingkaran

  Gambar tersebut menunjukkan sebuah contoh graf yang berordo 5 dengan himpunan titik $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ dan himpunan sisi $\{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_1x_5\}$. Misalkan *u* dan *v* merupakan titik-titik dari graf *G*, *u* dikatakan bertetangga dengan *v* jika terdapat sebuah sisi *e* yang menghubungkan *u* dan *v*, yaitu *e*=*uv*.

- Tahapan memahami

  Pada tahap ini yang dilakukan adalah memahami tentang operasi graf perkalian kartesian dan tentang kardinalitas dari graf hasil operasi perkalian kartesian serta diameter. Sebelum operasi graf perkaian kartesian dilakukan, perlu pemahaman mengenai definisi dari graf khusus yang digunakan pada penelitian dengan cara mengobservasi terhadap masing-masing graf khusus tersebut. Graf khusus yang digunakan yaitu graf lingkaran C_n dan graf kipas $F_{m,n}$ memiliki definisi

  sebagai berikut:

  1) untuk titik graf lingkaran $C_n: V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$
  2) untuk sisi graf lingkaran $C_n: E(C_n) = \{x_ix_{i+1}, x_5x_1; 1 \leq i \leq n\}$

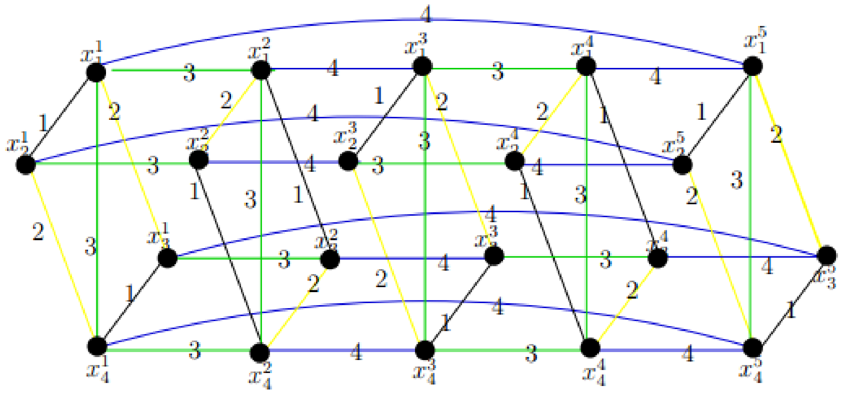
3) untuk titik graf kipas $F_{m,n}: V(F_{m,n}) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 3\ dan\ 1 \leq j \leq n\}$
4) untuk sisi graf kipas $F_{m,n}: E(F_{m,n}) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq 3\ dan\ 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$

Setelah memahami hal tersebut, kemudian memahami definisi dari graf perkalian kartesian untuk mengoperasikan kedua graf yang digunakan dalam penelitian. Sehingga dapat melanjutkan dengan membangun graf baru dari hasil operasi perkalian kartesian.

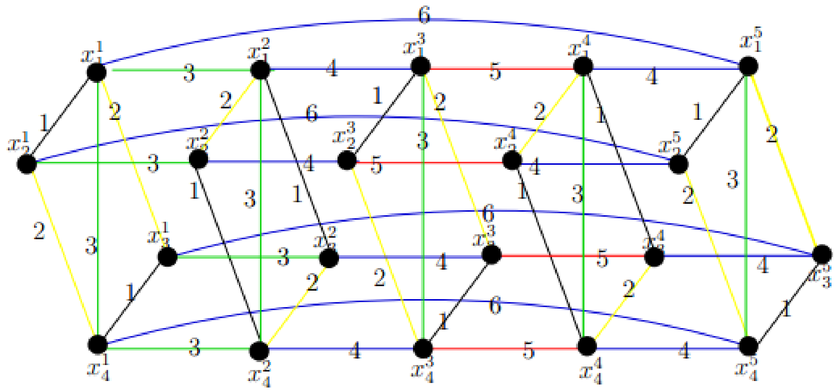
- Tahapan menerapkan

Pada tahap ini yang dilakukan adalah menerapkan pewarnaan pelangi pada graf hasil operasi perkalian kartesian. Dengan memahami konsep dari koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi diharapkan mampu menerapkan konsep tersebut pada graf hasil operasi perkalian kartesian yang akan diteliti. Misalkan pada graf *G = (V(G),E(G))* merupakan graf terhubung yang tak trivial didefinisikan suatu pewarnaan titik $\acute{c}: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}, k \in N$ dengan titik-titik interior yang berbeda. Lintasan *u - v path* di *G* dapat dikatakan lintasan pelangi *rainbow path* jika semua sisi *internal* pada lintasan di *G* mempunyai warna berbeda. Graf *G* disebut *rainbow connection* apabila dua titik yang berbeda yang dihubungkan oleh *rainbow path*. Pewarnaan pada *G* yang merupakan *rainbow connection* dikatakan sebagai *rainbow coloring* di *G*. Dalam hal ini, pewarnaan $\acute{c}$ dikatakan *rainbow coloring* di *G*. *Rainbow connection number* pada graf terhubung dinotasikan *rc(G)* yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf *G* menjadi *rainbow connection*. Batas bawah dari koneksi pelangi *rainbow connection* pada graf *G* adalah $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G) + 1$. Dimana *diam(G)* adalah diameter dari graf *G*.

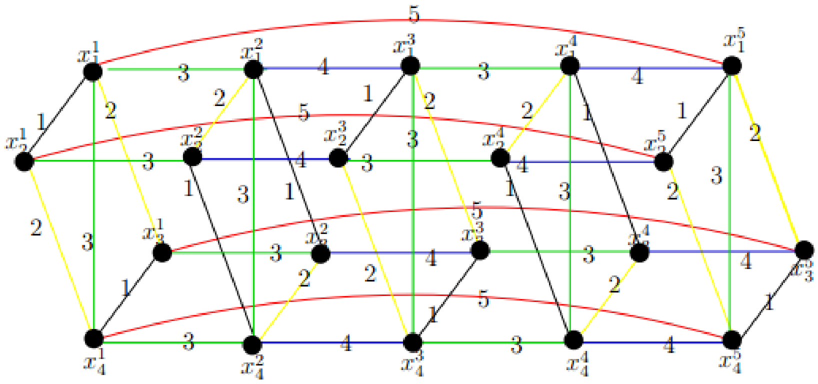
Pewarnaan titik $\acute{c}$ graf *G* dikatakan 2-koneksi pelangi *rainbow 2-connected*, jika untuk setiap pasangan *u*, *v* titik yang berbeda terdapat paling sedikit dua lintasan *u-v* dengan warna yang berbeda dan dua lintasan tidak saling berpotongan. Bilangan terkecil *k* sehingga graf *G* mempunyai suatu *k-colouring* didefinisikan sebagai *rainbow 2-connected number* graf *G* yang dinotasikan dengan rc_2. Dari definisi dapat disimpulkan bahwa $rc(G) \leq rc_2(G) \leq rc_3(G)$. Berikut peneliti menerapkan beberapa pola pewarnaan pada graf $F_{1,3}$. Pada awal penerapan peneliti tidak menemukan lintasan pelangi. Kedua, peneliti menemukan lintasan pelangi namun pewarnaannya tidak berpola. Sehingga pada akhirnya peneliti menemukan lintasan pelangi dengan pewarnaan yang berpola. Pewarnaan yang berpola ini digunakan saat \$expand\$ graf sampai graf ke *n*. Pada awal penerapan peneliti tidak menemukan lintasan pelangi. Pada gambar 2 terlihat bahwa titik $x_4^1 x_1^4$ tidak memiliki lintasan pelangi. Kedua, peneliti menemukan lintasan pelangi namun pewarnaannya tidak berpola. Pada gambar 3 terlihat bahwa sisi $x_j^i x_j^{i+1}$ tidak berpola. Sehingga pada akhirnya peneliti menemukan lintasan pelangi dengan pewarnaan yang berpola. Pewarnaan yang berpola ini digunakan saat *expand* graf sampai ke n.



Gambar 2. Bukan lintasan pelangi



Gambar 3. Lintasan Pelangi namun tidak berpola



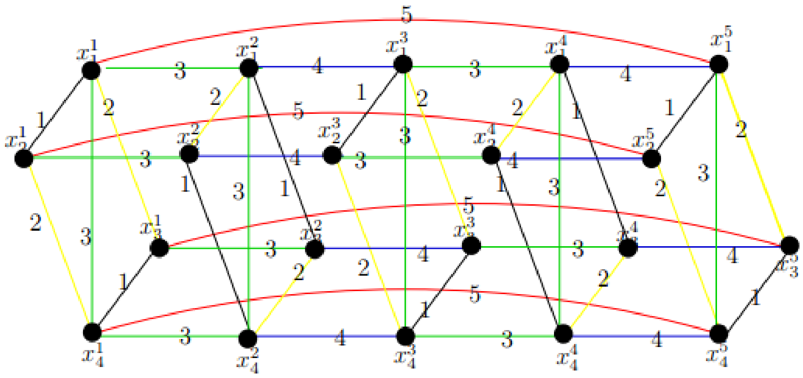
Gambar 4. Lintasan pelangi dan berpola

- Tahapan menganalisis

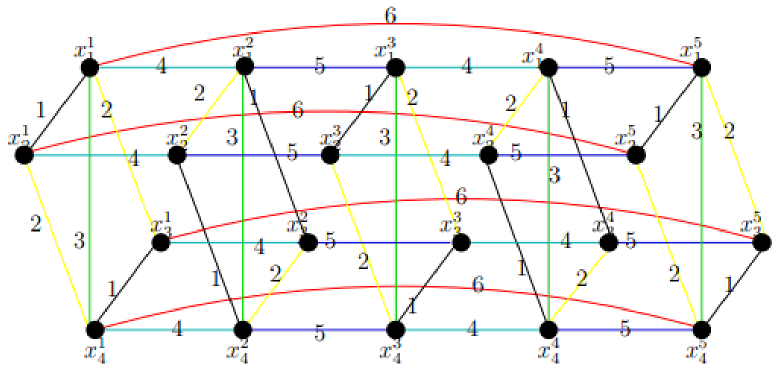
Pada tahap ini yang dilakukan adalah menganalisis fungsi koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi. Pada saat menentukan nilai koneksi pelangi hal pertama yang dilakukan adalah menentukan diameter graf tersebut. Pada graf $F_{1,3}\square C_n$ yang merupakan graf hasil operasi perkaliaan kartesian. Tahap menganalisis akan menunjukkan nilai koneksi pelangi dari graf tersebut yang dapat di-*expand* hingga suku ke *n*. Misalkan ketika *n=5* untuk mendapat pola nilai koneksi pelangi pada graf $F_{1,3}\square C_n$. Untuk *n* = *5* memiliki diameter 4 dari kedua graf didapatkan nilai $rc\left(F_{1,3}\square C_n\right)=4$. Untuk *n* = *6* mendapatkan nilai yang berbeda dengan diameter yang sama yaitu 5. Jadi ketika *n* di-*expand*, ternyata mempengaruhi diameter pada graf tersebut.

- Tahapan mengevaluasi

Tahap ini yang dilakukan adalah mengecek dan mengkaji ulang pewarnaan koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi. Hal ini dimaksudkan untuk mengetahui apakah suatu graf *G* warna yang digunakan adalah yang paling minimal dan optimal sehingga mencapai batas bawah berdasarkan teorema. Apabila suatu graf memiliki warna pelangi mencapai batas bawah maka tahap selanjutnya akan menerapkan fungsi warna pelangi, namun apabila warna pelangi tidak mencapai batas bawah maka graf tersebut akan diberi warna sebanyak batas atas-nya.



Gambar 5. $rc = \left\lceil 2 + \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$



Gambar 5. $rc_2 = \left\lceil 2 + \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2$

➢ Tahapan mencipta

Tahapan yang terakhir adalah mencipta, kata kunci yang digunakan untuk tahapan ini adalah memformulasikan dan menemukan. Makna dari memformulasikan yaitu bagaimana fungsi yang ditemukan setelah proses pada tahapan sebelumnya yakni tahap pengelompokan pada beda yang konsisten. Untuk hasil dari formulasi ini didapatkan $rc\left(F_{1,3}\square C_n\right) = \left\lceil 2 + \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$ dan $rc_2\left(F_{1,3}\square C_n\right) = \left\lceil 2 + \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Adapun kesimpulan dari penelitian ini antara lain:

a. Koneksi pelangi pada graf hasil operasi perkalian kartesian dalam penelitian ini adalah $rc\left(F_{1,3}\square C_n\right) = \left\lceil 2 + \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$.

b. 2-Koneksi pelangi pada graf hasil operasi perkalian kartesian dalam penelitian ini adalah $rc_2\left(F_{1,3}\square C_n\right) = \left\lceil 2 + \frac{n-1}{2} \right\rceil + 2$.

c. Keterkaitan menumbuhkan keterampilan berpikir tingkat tinggi dan proses menemukan nilai koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi pada graf hasil operasi perkalian kartesian yaitu dimulai dari tahap mengingat jenis graf yang akan digunakan, memahami karakteristik operasi graf perkalian kartesian untuk meneliti pewarnaan pelangi dan menentukan kardinalitasnya, menerapkan konsep atau teorema yang mengenai koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi pada graf yang diteliti, menganalisa fungsi pewarnaan koneksi pelangi hingga ditemukan nilai pewarnaan koneksi pelangi dan nilai pewarnaan 2-koneksi pelangi, mengevaluasi pewarnaan koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi sesuai dengan teorema, dan terkahir menciptakan teorema baru dalam pewarnaan koneksi pelangi dan 2-koneksi pelangi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] O. Saoni, Teori Graf, Serang: Rumah Press, 2003.

[2] Slamin, Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf, Jember: Universitas Jember, 2011.

[3] Dafik, Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Disconnected Graphs, Jember: CSS, 2011.

[4] Chartrand, Gery and L. Lesniak, Graphs and Digraphs Second Edition, California: a Division of Wadswrth,Inc, 1986.

[5] S. Wahyuni, "Development Test System Based On Linear Equations Two Variable Revised Taxonomy Bloom To Measure High Order Thinking Skills At Studentclass VIII SMPN Sungguminasa Gowa," *Daya Matematis,* 2017.

[6] E. Oktavianingtyas, "Studi tentang Faktor-Faktor yang mempengaruhi Prestasi Belajar Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember," *Kadikma,* 2013.