NILAI KETAKTERATURAN TOTAL SISI DARI GRAF SIPUT

Shapbian Novindasari[34], Slamin[35], Dafik[36]

Abstract. *Let G=(V,E) be a simple graph, a labeling* $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ *is called an edge irregular total k-labelling of G if for any two different edges e and f of G there is,* $\omega t(e) \neq \omega t(f)$. *The total edge irregularity strength denoted by tes G is the smallest positive integer k for which G has an edge irregular total k-labelling. In this paper, we will determine the total edge irregularity strengths of a Snail graph, the union isomorphic and non-isomorphic union of Snail graph, and shackle graph of Snail graph. We show that* $tes(S_n) = n + 3$, *for* $n \geq 1$, $tes(mS_n) = \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$, *for* $n \geq 1$ *and* $m \geq 2$, $tes(S_n \cup \dots \cup S_r) = \left\lceil \frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3} \right\rceil$, *for* $n \neq r$ *where* $n, r \in$ *natural numbers, and* $tes\big(Shack(S_n, m)\big) = \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$, *for* $n \geq 1$ *and* $m \geq 2$.

Key Words*: Total edge irregular labeling, Total edge irregularity strength, Snail graph.*

PENDAHULUAN

Salah satu cabang matematika yang cukup populer yaitu teori graf mengenai pelabelan graf (*graph labelling*). Terdapat beberapa jenis pelabelan graf, salah satunya adalah pelabelan total sisi irreguler pada graf *G* yaitu pemberian label bilangan bulat positif (label boleh berulang) dengan nilai label seminimum mungkin pada himpunan titik dan sisi pada graf *G* sedemikian hingga bobot total di setiap sisinya berbeda serta mengacu pada Teorema berikut, Bača et al (2002), yaitu: $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$.

Dalam penelitian ini akan dicari pelabelan total sisi irregular pada graf Siput dengan mengetahui nilai *tes* pada graf Siput tunggal, gabungan isomorfis maupun non-isomorfis serta graf belenggu (*shackle graph*) dari graf Siput.

Graf Siput (S_n)

Graf siput adalah salah satu family dari graf siput. Graf ini merupakan salah satu contoh graf (*well-defined*), yang dinotasikan dengan S_n dimana *n* merupakan jumlah pasang titik pada punggung graf Siput. Graf Siput dikembangkan dari graf roda (*wheel*) dan belum memiliki famili graf. Graf Siput memiliki himpunan titik $V = \{S, N, A, I, L, E, R, Y_i, X_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E =$

---

[34] Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[35] Dosen Program Studi Sistem Informasi Universitas Jember
[36] Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

$\{RE, EY_1, Y_iX_i, X_iY_{i+1}, X_nS, SN, NA, AL, IL, LE, LX_i; 1 \leq i \leq n\}$. Graf Siput memiliki $2n + 7$ titik dan $3n + 7$ sisi.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah deduktif aksiomatik dan pendeteksian pola. Adapun teknik penelitian graf Siput S_n dengan pelabelan total sisi irregular adalah sebagai berikut: (1) menentukan batas bawah dan batas atas dari graf Siput *Sn* berdasarkan Teorema dasar, (2) menggunakan metode pendeteksian pola untuk melabeli seluruh titik dan sisi pada graf *Sn* dengan bilangan bulat positif, (3) memeriksa apakah bobot total di setiap sisi graf Siput sudah berbeda, (4) menentukan formulasi yang berupa fungsi yang memetakan himpunan titik dan himpunan sisi pada bilangan bulat positif, (5) menentukan nilai $tes(S_n)$, untuk $n \geq 1$ dengan menggunakan batas atas dan batas bawah yang sudah diperoleh, (6) melakukan langkah yang sama seperti di atas untuk menentukan nilai *tes* pada gabungan graf Siput isomorfis, non-isomorfis dan graf belenggu (*shackle graph)* dengan batasan yang sudah ditentukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah awal dalam menentukan pelabelan total sisi irregular adalah menentukan jumlah sisi pada graf yang diteliti, menentukan batas bawah, menentukan label titik dan label sisi sehingga didapat bobot total sisi yang berbeda pada graf Siput dan gabungan yang isomorfis dan non-isomorfis serta graf belenggu (*shackle graph*) dari graf Siput.

Teorema 1: Nilai ketakteraturan total sisi pada graf Siput tunggal adalah $tes(S_n) = n + 3$, untuk $n \geq 1$.

Bukti: Akan dibuktikan batas bawah $tes(S_n)$, yaitu $tes(S_n) \geq \left\lceil \frac{(3n+7)+2}{3} \right\rceil$ berdasarkan Teorema dasar, dengan mensubstitusikan jumlah sisi $S_n = (3n + 7)$ maka didapat $tes(S_n) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{(3n+7)+2}{3} \right\rceil = n + 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari $tes(S_n)$ dengan melabeli seluruh titik dan sisi pada graf Siput S_n dengan formulasi pelabelan sebagai berikut.

- Label titik

  $\lambda(S) = 3$

$\lambda(N) = \lambda(A) = 2$

$\lambda(I) = \lambda(L) = 1$

$\lambda(E) = \lambda(R) = n + 3$

$\lambda(X_i) = n + 3 - i, \quad i = 1,2, \dots, n$

$\lambda(Y_i) = n + 4 - i, \quad i = 1,2, \dots, n$

- Label sisi

$\lambda(LI) = \lambda(LA) = \lambda(LE) = 1$

$\lambda(LX_i) = 1, \quad i = 1,2, \dots, n$

$\lambda(ER) = n + 3$

$\lambda(EY_1) = \lambda(X_n S) = \lambda(NA) = \lambda(SN) = n + 2$

$\lambda(Y_i X_i) = n + 2, \quad i = 1,2, \dots, n$

$\lambda(X_i Y_{i+1}) = n + 2, \quad i = 1,2, \dots, n - 1$

Berdasarkan label titik dan sisi di atas maka dapat ditentukan formulasi bobot total di setiap sisi yaitu:

$\omega(LI) = 3$

$\omega(LA) = 4$

$\omega(LX_i) = n + 5 - i, \quad i = 1,2, \dots, n$

$\omega(LE) = n + 5$

$\omega(NA) = n + 6$

$\omega(SN) = n + 7$

$\omega(X_n S) = n + 8$

$\omega(Y_i X_i) = 3n + 9 - 2i, \quad i = 1,2, \dots, n$

$\omega(X_i Y_{i+1}) = 3n + 10 - 2i, \quad i = 1,2, \dots, n - 1$

$\omega(EY_1) = 3n + 8$

$\omega(ER) = 3n + 9$

Dari formula di atas, nilai label terbesarnya adalah $n + 3$, dimana nilai tersebut merupakan nilai $tes(S_n)$. Jadi batas atas $tes(S_n)$ sama dengan batas bawahnya, sehingga terbukti bahwa $tes(S_n) = n + 3$, untuk $n \geq 1$.

Selanjutnya akan disajikan teorema tentang nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan saling lepas graf Siput isomorfis.

Teorema 2: Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan saling lepas graf Siput isomorfis adalah $tes(mS_n) = \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 2$.

Bukti: Akan dibuktikan batas bawah $tes(mS_n)$, yaitu $tes(mS_n) \geq \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$ berdasarkan Teorema dasar, dengan mensubstitusikan jumlah sisi $|E(mS_n)| = m(3n+7)$ maka didapat $tes(mS_n) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari $tes(mS_n)$ dengan melabeli seluruh titik dan sisi pada gabungan graf Siput isomofis mS_n dengan formulasi pelabelan sebagai berikut untuk $2 \leq k \leq m$.

- Label titik

$$\gamma(S^k) = \lambda(S) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(N^k) = \lambda(N) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(A^k) = \lambda(A) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(I^k) = \lambda(I) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(L^k) = \lambda(L) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(E^k) = \lambda(E) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(R^k) = \lambda(R) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(X_i^k) = \lambda(X_i) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$\gamma(Y_i^k) = \lambda(Y_i) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

- Label sisi

$$\gamma(L^kI^k) = \lambda(LI) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(L^kA^k) = \lambda(LA) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(L^kE^k) = \lambda(LE) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(L^kX_i^k) = \lambda(LX_i) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$\gamma(E^kR^k) = \lambda(ER) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$$\gamma(E^kY_1^k) = \lambda(EY_1) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$$

$\gamma(X_n^k S^k) = \lambda(X_n S) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil\frac{(k-1)(3n+7)}{3}\right\rceil$

$\gamma(N^k A^k) = \lambda(NA) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil\frac{(k-1)(3n+7)}{3}\right\rceil$

$\gamma(S^k N^k) = \lambda(SN) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil\frac{(k-1)(3n+7)}{3}\right\rceil$

$\gamma(Y_i^k X_i^k) = \lambda(Y_i X_i) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil\frac{(k-1)(3n+7)}{3}\right\rceil$, $i = 1,2,\dots,n$

$\gamma(X_i^k Y_{i+1}^k) = \lambda(X_i Y_{i+1}) + (k-1)(3n+7) - 2\left\lceil\frac{(k-1)(3n+7)}{3}\right\rceil$, $i = 1,2,\dots,n-1$

Berdasarkan label titik dan sisi di atas maka dapat ditentukan formulasi bobot total di setiap sisi untuk $2 \le k \le m$, yaitu:

$\omega(L^k I^k) = \omega(LI) + (k-1)(3n+7)$

$\omega(L^k A^k) = \omega(LA) + (k-1)(3n+7)$

$\omega(L^k X_i^k) = \omega(LX_i) + (k-1)(3n+7)$, $i = 1,2,\dots,n$

$\omega(L^k E^k) = \omega(LE) + (k-1)(3n+7)$

$\omega(N^k A^k) = \omega(NA) + (k-1)(3n+7)$

$\omega(S^k N^k) = \omega(SN) + (k-1)(3n+7)$

$\omega(X_n^k S^k) = \omega(X_n S) + (k-1)(3n+7)$

$\omega(Y_i^k X_i^k) = \omega(Y_i X_i) + (k-1)(3n+7)$, $i = 1,2,\dots,n$

$\omega(X_i^k Y_{i+1}^k) = \omega(X_i Y_{i+1}) + (k-1)(3n+7)$, $i = 1,2,\dots,n-1$

$\omega(E^k Y_1^k) = \omega(EY_1) + (k-1)(3n+7)$

$\omega(E^k R^k) = \omega(ER) + (k-1)(3n+7)$

Dari formula di atas, nilai label terbesarnya adalah $\left\lceil\frac{m(3n+7)+2}{3}\right\rceil$, dimana nilai tersebut merupakan nilai $tes(mS_n)$. Jadi batas atas $tes(mS_n)$ sama dengan batas bawahnya, sehingga terbukti bahwa $tes(mS_n) = \left\lceil\frac{m(3n+7)+2}{3}\right\rceil$, untuk $n \ge 1$ dan $m \ge 2$.

Teorema selanjutnya yang akan dibuktikan tentang nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan saling lepas non-isomorfis, yaitu:

Teorema 3: Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan saling lepas graf Siput non-isomorfis adalah $tes(S_n \cup \dots \cup S_r) = \left\lceil\frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3}\right\rceil$, untuk $n \ne r$ dimana $n, r \in$ bilangan asli.

Bukti: Akan dibuktikan batas bawah dari gabungan saling lepas graf Siput non-isomorfis, yaitu $tes(S_n \cup \ldots \cup S_r) \geq \left\lceil \frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3} \right\rceil$ berdasarkan Teorema dasar, dengan mensubstitusikan jumlah sisi $|E(S_n \cup \ldots \cup S_r)| = (3n+7) + \cdots + (3r+7)$ maka terbukti $tes(S_n \cup \ldots \cup S_r) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3} \right\rceil$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa batas atas dari *tes*, yaitu $tes(S_n \cup \ldots \cup S_r) \geq \left\lceil \frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3} \right\rceil$ dengan melabeli seluruh titik dan sisi pada gabungan saling lepas graf Siput non-isomorfis. Berikut ini merupakan formulasi pelabelan pada sembarang bagian graf Siput dalam gabungan non-isomorfisnya $\left(S_n \cup \ldots \cup S_p \cup S_q \cup \ldots \cup S_r\right)$, misalkan pada bagian S_q:

- Label titik

$\beta(S^q) = \lambda(S) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(N^q) = \lambda(N) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(A^q) = \lambda(A) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(I^q) = \lambda(I) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(L^q) = \lambda(L) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(E^q) = \lambda(E) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil$

$\beta(R^q) = \lambda(R) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil$

$\beta(X_i^k) = \lambda(X_i) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil, \qquad i = 1,2,\ldots,n$

$\beta(Y_i^k) = \lambda(Y_i) + \left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil, \qquad i = 1,2,\ldots,n$

- Label sisi

$\beta(L^q I^q) = \lambda(LI) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(L^q A^q) = \lambda(LA) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(L^q E^q) = \lambda(LE) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q$

$\beta(L^q X_i^q) = \lambda(LX_i) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil \frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3} \right\rceil + n - q,$

$i = 1,2,\ldots,n$

$$\beta(E^qR^q) = \lambda(ER) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil\frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3}\right\rceil$$

$$\beta(E^qY_1^q) = \lambda(EY_i) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil\frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3}\right\rceil$$

$$\beta(X_n^qS^q) = \lambda(X_nS) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil\frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3}\right\rceil$$

$$\beta(N^qA^q) = \lambda(NA) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil\frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3}\right\rceil$$

$$\beta(S^qN^q) = \lambda(SN) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil\frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3}\right\rceil$$

$$\beta(Y_i^qX_i^q) = \lambda(Y_iX_i) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil\frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3}\right\rceil,$$
$$i = 1,2,\dots,n$$

$$\beta(X_i^q\,Y_{i+1}^q) = \lambda(X_iY_{i+1}) + (3p+7) + \cdots + (3q+7) - 2\left\lceil\frac{(3p+7)+\cdots+(3q+7)}{3}\right\rceil,$$
$$i = 1,2,\dots,n-1$$

Berdasarkan label titik dan sisi di atas maka dapat ditentukan formulasi bobot total di setiap sisi, yaitu:

$$\omega(L^qI^q) = \omega(LI) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$
$$\omega(L^qA^q) = \omega(LA) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$
$$\omega(L^qX_i^q) = \omega(LX_i) + (3p+7) + \cdots + (3q+7), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega(L^qE^q) = \omega(LE) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$
$$\omega(N^qA^q) = \omega(NA) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$
$$\omega(S^qN^q) = \omega(SN) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$
$$\omega(X_n^qS^q) = \omega(X_nS) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$
$$\omega(Y_i^qX_i^q) = \omega(Y_iX_i) + (3p+7) + \cdots + (3q+7), \qquad i = 1,2,\dots,n$$
$$\omega(X_i^q\,Y_{i+1}^q) = \omega(X_iY_{i+1}) + (3p+7) + \cdots + (3q+7), \qquad i = 1,2,\dots,n-1$$
$$\omega(E^qY_1^q) = \omega(EY_i) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$
$$\omega(E^qR^q) = \omega(ER) + (3p+7) + \cdots + (3q+7)$$

Dari formula di atas, nilai label terbesarnya adalah $\left\lceil\frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3}\right\rceil$, dimana nilai tersebut merupakan nilai $tes(S_n \cup \dots \cup S_r)$. Jadi batas atas $tes(S_n \cup \dots \cup S_r)$ sama dengan batas bawahnya, sehingga terbukti bahwa $tes(S_n \cup \dots \cup S_r) = \left\lceil\frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3}\right\rceil$, untuk $n \neq r$ dimana $n, r \in$ bilangan asli.

Teorema selanjutnya yang akan dibuktikan yaitu tentang nilai ketakteraturan total sisi pada graf belenggu (*shackle graph*) dari graf Siput.

Teorema 4: Nilai ketakteraturan total sisi pada graf belenggu (*shackle graph*) dari graf Siput adalah $tes\big(Shack(S_n, m)\big) = \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 2$.

Bukti: Akan dibuktikan batas bawah yaitu $tes\big(Shack(S_n, m)\big) \geq \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$ berdasarkan Teorema dasar, dengan mensubstitusikan jumlah sisi $m(3n+7)$ maka didapat $tes\big(Shack(S_n, m)\big) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari $tes\big(Shack(S_n, m)\big)$ dengan cara melabeli seluruh titik dan sisi pada graf belenggu dari graf Siput dengan formulasi pelabelan sebagai berikut.

- Label titik

  $\sigma(S^k) = \lambda(S) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$

  $\sigma(N^k) = \lambda(N) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$

  $\sigma(A^k) = \lambda(A) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$

  $\sigma(I^k) = \lambda(I) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$

  $\sigma(L^k) = \lambda(L) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$

  $\sigma(E^k) = \lambda(E) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$

  $\sigma(R^k) = \lambda(R) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$

  $\sigma(X_i^k) = \lambda(X_i) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$, $\quad i = 1,2,\dots,n$

  $\sigma(Y_i^k) = \lambda(Y_i) + \left\lceil \frac{(k-1)(3n+7)}{3} \right\rceil$, $\quad i = 1,2,\dots,n$

- Label sisi

  $\sigma(I^1L^1) = 1$

  $\sigma(L^kA^k) = \sigma(L^kE^k) = k(3n+7) - 2\left\lceil \frac{k(3n+7)+2}{3} \right\rceil - n$

  $\sigma(L^kX_i^k) = k(3n+7) - 2\left\lceil \frac{k(3n+7)+2}{3} \right\rceil - n$, $\quad i = 1,2,\dots,n$

  $\sigma(E^kR^k) = k(3n+7) - 2\left\lceil \frac{k(3n+7)+2}{3} \right\rceil + 2$

  $\sigma\big(E^kY_1^k\big) = \sigma(X_n^kS^k) = \sigma(N^kA^k) = \sigma(S^kN^k) = k(3n+7) -$
  $2\left\lceil \frac{k(3n+7)+2}{3} \right\rceil + 1$

$\sigma\left(Y_i^k X_i^k\right) = k(3n+7) - 2\left\lceil\frac{k(3n+7)+2}{3}\right\rceil + 1,\qquad i = 1,2,\dots,n$

$\sigma\left(X_i^k Y_{i+1}^k\right) = k(3n+7) - 2\left\lceil\frac{k(3n+7)+2}{3}\right\rceil + 1,\qquad i = 1,2,\dots,n-1$

$\sigma(R^{k-1}L^k) = (k-1)(3n+7) - \left\lceil\frac{(k-1)(3n+7)+2}{3}\right\rceil - \left\lceil\frac{k(3n+7)+2}{3}\right\rceil + n + 5$

Berdasarkan label titik dan sisi di atas maka dapat ditentukan formulasi bobot total di setiap sisi, yaitu:

$\omega(L^1 I) = 3$

$\omega(R^{k-1}L^k) = k(3n+7) - 3n - 4$

$\omega(L^k A^k) = k(3n+7) - 3n - 3$

$\omega\left(L^k X_i^k\right) = k(3n+7) - 2n - 2 - i$

$\omega(L^k E^k) = k(3n+7) - 2n - 2$

$\omega(N^k A^k) = k(3n+7) - 2n - 1$

$\omega(S^k N^k) = k(3n+7) - 2n$

$\omega(X_n^k S^k) = k(3n+7) - 2n + 1$

$\omega\left(Y_i^k X_i^k\right) = k(3n+7) + 2 - 2i$

$\omega\left(X_i^k Y_{i+1}^k\right) = k(3n+7) + 3 - 2i$

$\omega\left(E^k Y_1^k\right) = k(3n+7) + 1$

$\omega(E^k R^k) = k(3n+7) + 2$

Dari formula di atas, nilai label terbesarnya adalah $\left\lceil\frac{m(3n+7)+2}{3}\right\rceil$, dimana nilai tersebut merupakan nilai dari $tes\left(Shack(S_n, m)\right)$. Jadi batas atas $tes\left(Shack(S_n, m)\right)$ sama dengan batas bawahnya, sehingga terbukti bahwa $tes\left(Shack(S_n, m)\right) = \left\lceil\frac{m(3n+7)+2}{3}\right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 2$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Nilai ketakteraturan total sisi pada graf Siput tunggal $tes(S_n) = n + 3$, untuk $n \geq 1$;
2. Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan saling lepas graf Siput isomorfis adalah $tes(mS_n) = \left\lceil\frac{m(3n+7)+2}{3}\right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 2$;

3. Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan saling lepas graf Siput non-isomorfis adalah $tes(S_n \cup ... \cup S_r) = \left\lceil \frac{(3n+7)+\cdots+(3r+7)+2}{3} \right\rceil$, untuk $n \neq r$ dimana $n, r \in$ bilangan asli;
4. Nilai ketakteraturan total sisi pada graf belenggu (shackle graph) dari graf Siput adalah $tes\big(Shack(S_n, m)\big) = \left\lceil \frac{m(3n+7)+2}{3} \right\rceil$, untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 2$.

DAFTAR PUSTAKA

Ba·ca, M., Jendrol., Miller,M. dan Ryan,J. 2007. *On Irregular Total Labelling. Discrete Mathematics*, 307(1): 1378-1388.

Inayah, N. 2013. *Pelabelan (a,d)-H Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf*. Disertasi. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Maryati, T.K., Salman, A.N.M., Baskoro, E.T., Ryan, J., dan Miller, M. 2010. On H-Supermagic Labellings for Certain Shakles and Amalgamations of a Connected Graph. Discrete Mathematica.

Slamin. 2009. *DESAIN JARINGAN: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.